LƯ SĨ PHÁP

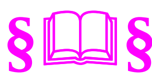


TOÁN 11



CHUYÊN ĐỀ

GIỚI HẠN



LSP
GV-Trường THPT Tuy Phong

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 11.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG
1. Lí thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập có hướng dẫn giải và bài tập tự luyện
3. Trắc nghiệm

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 01655.334.679 – 0916 620 899

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sỹ Pháp
GV_ Trường THPT Tuy Phong

MỤC LỤC

Chương IV. GIỚI HẠN

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$
   - Dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn 0
2. Giới hạn vô cực
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ *hay* $u_n \to +\infty$ *khi* $n \to +\infty$
   - Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$
   - Nhận xét: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = -\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$

Lưu ý: Thay cho viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L, \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, ta viết $\lim u_n = a, \lim u_n = \pm\infty$

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^k} = 0$; $\lim n^k = +\infty$, với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$; $\lim q^n = +\infty$ nếu q > 1

c) $\lim c = c$; $\lim \frac{c}{n^k} = 0$, lim(c u_n) = climu_n, với c là hằng số, $k \in \mathbb{N}^*$

d) $\lim \frac{n}{q^n} = 0$ nếu $q > 1$

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = M$, thì:

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = L + M$
- $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = L - M$
- $\lim u_n.v_n = \lim u_n.\lim v_n = L.M$
- $\lim(c.u_n) = c.L$ (với c là hằng số)
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$)

Định lí 2. Giả sử $\lim u_n = L$

- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$
- $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$
- Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

5. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

a) Quy tắc 1. Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

b) <u>Quy tắc 2.</u> Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	–	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	–	$+\infty$

c) <u>Quy tắc 3.</u> . Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ thì $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ được cho trong bảng:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
+	+	$+\infty$
+	–	$-\infty$
–	+	$-\infty$
–	–	$+\infty$

<u>Chú ý</u> . Nếu $\lim u_n = L > 0, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\frac{u_n}{v_n} = 0$

6. <u>Tổng cấp số nhân lùi vô hạn</u>
   - Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$
   - Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}; |q| < 1 \text{ hay } S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{u_1}{1-q}; |q| < 1$$

7. <u>Định lí kẹp về giới hạn của dãy số</u>
   Cho ba dãy số (u_n), (v_n) ,(w_n) và số thực L. Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ với mọi n và lim u_n = lim w_n = L thì dãy số (v_n) có giới hạn và lim v_n = L.
8. <u>Lưu ý</u>
   a) Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn
   b) Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn
   c) Nếu limu_n = a thì limu_{n+1} = a
   d) Số e: $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
9. <u>Phương pháp tìm giới hạn của dãy số</u>
- Vận dụng nội dung định nghĩa
- Tìm giới hạn của một dãy số ta thường đưa về các giới hạn dạng đặc biệt và áp dụng các định lí về giới hạn hoặc các định lí về giới hạn vô cực:
  + Nếu biểu thức có dạng phân thức mà mẫu và tử đều chứa các lũy thừa của n, thì chia tử và mẫu cho n^k, với k là số mũ cao nhất.
  + Nếu biểu thức có chứa n dưới dấu căn, thì có thể nhân tử số và mẫu số với cùng một biểu thức liên hợp.
10. <u>Phương pháp tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn</u>
- Nhận dạng xem dãy số đã cho có phải là một cấp số nhân lùi vô hạn không. Sau đó áp dụng công thức tính tổng đã biết.

- Cách tìm cấp số nhân lùi vô hạn khi biết một số điều kiện: Dùng công thức tính tổng để tìm công bội và số hạng đầu
- Cách viết một số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số hữu tỉ: Khai triển số đã cho dưới dạng tổng của một số nhân lùi vô hạn và tính tổng này.

B. BÀI TẬP

Bài 1.1. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n| \le \frac{n+1}{n^2}$ với mọi *n*. Chứng minh rằng lim u_n = 0.

HD Giải

Đặt $v_n = \frac{n+1}{n^2}$. Ta có $\lim v_n = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có $|u_n| \le v_n \le |v_n|$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là lim u_n = 0.

Bài 1.2. Bằng định nghĩa tính giới hạn $\lim \frac{3^n + 1 - \sin\frac{\pi}{n}}{3^n}$

HD Giải

Ta có $\lim \frac{3^n + 1 - \sin\frac{\pi}{n}}{3^n} = \lim \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} \right)$

Mặt khác, ta lại có $\left| \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} \right| \le \frac{1}{3^n} = \left| \frac{1}{3^n} \right|$ và $\lim \frac{1}{3^n} = \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ nên $\left| \frac{1}{3^n} \right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Từ đó suy ra $\left| \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} \right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nghĩa là $\lim \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} = 0$. Vậy $\lim \frac{3^n + 1 - \sin\frac{\pi}{n}}{3^n} = \lim \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{3^n} \right) = 1$

Bài 1.3. Cho biết dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n > n^2$ với mọi *n*. Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$

HD Giải

Vì $\lim n^2 = +\infty$ (giới hạn đặt biệt), nên n^2 có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, theo giả thiết $u_n > n^2$ với mọi *n*, nên u_n cũng có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Vậy $\lim u_n = +\infty$

Bài 1.4. Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}$ với mọi *n*. Chứng minh rằng $\lim u_n = 1$

HD Giải

Ta có $\lim \frac{1}{n^3} = 0$ nên $\left|\frac{1}{n^3}\right|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi . Mặt khác, ta có $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} = \left|\frac{1}{n^3}\right|$ với mọi *n*

Từ đó suy ra $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩ là lim(u_n – 1) = 0. Do đó limu_n = 1

Bài 1.5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$

a) Tìm số n sao cho $|u_n - 2| < \frac{1}{100}$

b) Chứng minh rằng với mọi *n* > 2007 thì các số hạng của dãy số (u_n) đều nằm trong khoảng (1,998; 2,001)

HD Giải

a) Ta có $|u_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2}$. Khi đó $|u_n - 2| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 298$

b) Khi $n > 2007 \Leftrightarrow n + 2 > 2009 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{3}{2009}$

$\Leftrightarrow |u_n - 2| < \frac{3}{2009} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2009} < u_n < 2 + \frac{3}{2009} \Leftrightarrow 1{,}998 < u_n < 2{,}001$

Bài 1.6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$ b) $\lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}$ c) $\lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$ d) $\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$

HD Giải

a) $\lim \frac{6n-1}{3n+2} = \lim \frac{n\left(6 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = 2$ b) $\lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = 2$

c) $\lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1} = \frac{3}{2}$ d) $\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim \frac{2 - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}$

Bài 1.7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n}$ b) $\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ c) $\lim \left(\frac{n+1}{n} + \frac{\cos n}{3^n}\right)$ d) $\lim \left(3 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$

HD Giải

a) $\lim \frac{3^n + 5.4^n}{4^n + 2^n} = \lim \frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5\right]}{4^n\left(1 + \left(\frac{2}{4}\right)^n\right)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 5}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 5$

b) $\lim \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim \left(\dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\cos n}{3^n} \right) = \lim \dfrac{n+1}{n} + \lim \dfrac{\cos n}{3^n} = 1$

d) $\lim \left(3 + \dfrac{(-1)^n}{2^n} \right) = \lim 3 + \lim \left(-\dfrac{1}{2} \right)^n = 3$

Bài 1.8. Tính các giới hạn

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$ b) $\lim \dfrac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$ c) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ d) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}$

HD Giải

a) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2} = \lim \dfrac{n\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+n}{1-2n^2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-2} = 0$

b) $\lim \dfrac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1} = \lim \dfrac{4n^3-8n^2-3n+9}{n^3+1} = \lim \dfrac{4-\dfrac{8}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{9}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 4$

c) $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2} = \lim \dfrac{3n\sqrt{1-\dfrac{1}{9n}+\dfrac{1}{9n^2}}}{4n-2} = \dfrac{3}{4}$

d) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+1}{2+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{3}{2}$

Bài 1.9. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right)$ b) $\lim \left(\sqrt{n^2-n} - n \right)$

c) $\lim \left(\sqrt{n^4+n^2+1} - n^2 \right)$ d) $\lim n \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+2} \right)$

HD Giải

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1} \right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1} \right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}}$

$= \lim \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} = \lim \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim \left(\sqrt{n^2-n} - n \right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2-n} - n \right)\left(\sqrt{n^2-n} + n \right)}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \dfrac{-n}{n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}} + 1 \right)} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\dfrac{n^4+n^2+1-n^4}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$$d)\lim n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}\right)\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{-3n}{n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}\right)}=-\frac{3}{2}$$

<u>Bài 1.10</u>. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1}\right)$ b) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

<u>HD Giải</u>

a) $+\infty$ b) 0 c) $\dfrac{1}{3}$

d) $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+n}{n^2+2n-n^2}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}{2}=1$

<u>Bài 1.11</u>. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+2\right)$ b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

c) $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)$ d) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

<u>HD Giải</u>

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+2\right)=\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n}+n}+2\right)$

$$=\lim\left(\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1\right)}+2\right)=\lim\left(\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}+2\right)=\frac{7}{2}$$

$$b)\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6-4n^5+4n^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{4}{n^4}}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}$$

c) $\lim \sqrt{n}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)=\lim \dfrac{\sqrt{n}\left(n-1-n\right)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=-\lim \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}$

$d)\ \lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}=\lim \dfrac{\left(\sqrt{4n^2+1}-(2n-1)\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)\left(\sqrt{4n^2+1}-(2n-1)\right)}$

$=\lim \dfrac{4n\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{2n\left(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)\right)}=\lim \dfrac{2\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{4}{4}=1$

Bài 1.12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \sqrt{3n^4-10n+12}$ b) $\lim\left(2.3^n-5.4^n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)$ d) $\lim \sqrt{2.3^n-n+2}$

HD Giải

a) $+\infty$; b) $-\infty$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+1\right)=+\infty$

d) $\sqrt{2.3^n-n+2}=\left(\sqrt{3}\right)^n\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}$ với mọi n. Vì $\lim \dfrac{n}{3^n}=0;\lim \dfrac{2}{3^n}=0$ nên

$\lim \sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{2}{3^n}}=\sqrt{2}>0$. Ngoài ra $\lim\left(\sqrt{3}\right)^n=+\infty$

Do đó $\lim \sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$

Bài 1.13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(n^2-\dfrac{2}{n+1}\right)$ b) $\lim(-n^2+n\sqrt{n}+1)$

c) $\lim \dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{n^2+n+1}$ d) $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+1}+\dfrac{3}{n^2+1}+...+\dfrac{n-1}{n^2+1}\right)$

HD Giải

a) $\lim\left(n^2-\dfrac{2}{n+1}\right)=\lim \dfrac{n^3+n^2-2}{n+1}=\lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}=+\infty$

b) $\lim(-n^2+n\sqrt{n}+1)=\lim(-n^2)\left(1-\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right)=-\infty$

c) $\lim \dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{n^2+n+1}=\lim \dfrac{n\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}}{n^2+n+1}=\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+...+\frac{n-1}{n^2+1}\right)=\lim\frac{1+2+3+...+(n-1)}{n^2+1}=\lim\frac{n(n-1)}{2n^2+2}=\frac{1}{2}$

Bài 1.14. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left(3.2^n-5^{n+1}+10\right)$ b) $\lim\frac{2^{n+1}-3.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}$ c) $\lim\frac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}$

d) $\lim\frac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}$ e) $\lim\sqrt{\frac{3^n+2^{n+1}}{5+3^{n+1}}}$ f) $\lim\sqrt{3.4^n-n+2}$

HD Giải

a) $\lim\left(3.2^n-5^{n+1}+10\right)=\lim 5^n\left(3.\left(\frac{2}{5}\right)^n-5+10.\frac{1}{5^n}\right)$

Ta có $\lim 5^n=+\infty$, $\lim\left(3.\left(\frac{2}{5}\right)^n-5+10.\frac{1}{5^n}\right)=-5<0$. Do vậy $\lim\left(3.2^n-5^{n+1}+10\right)=-\infty$

b) $\lim\frac{2^{n+1}-3.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}=\lim\frac{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n-3+\frac{3}{5^n}}{3.\left(\frac{2}{5}\right)^n+7.2.\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

Ta có $\lim\left(2.\left(\frac{2}{5}\right)^n-3+\frac{3}{5^n}\right)=-3<0$; $\lim\left[3.\left(\frac{2}{5}\right)^n+7.2.\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]=0$ và $3.\left(\frac{2}{5}\right)^n+7.2.\left(\frac{4}{5}\right)^n>0,\forall n$

Vậy $\lim\frac{2^{n+1}-3.5^n+3}{3.2^n+7.4^n}=-\infty$

c) Chia tử và mẫu cho 3^n, ta được $\lim\frac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}=-\frac{1}{9}$

d) Chia tử và mẫu cho 4^n, và lưu ý $\lim\frac{n}{q^n}=0$ nếu $|q|<1$. Vậy $\lim\frac{13.3^n-5n}{3.2^n+5.4^n}=\frac{0}{5}=0$

e) Xét $u_n=\frac{3^n+2^{n+1}}{5+3^{n+1}}$, chia tử và mẫu cho 3^n, khi đó $\lim\frac{3^n+2^{n+1}}{5+3^{n+1}}=\frac{1}{3}$

Vậy $\lim\sqrt{\frac{3^n+2^{n+1}}{5+3^{n+1}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\lim\sqrt{3.4^n-n+2}=\lim 2^n\left(\sqrt{3-\frac{n}{4^n}+\frac{2}{4^n}}\right)$

Ta có $\lim 2^n=+\infty$, $\lim\sqrt{3-\frac{n}{4^n}+\frac{2}{4^n}}=\sqrt{3}>0$. Do vậy $\lim\sqrt{3.4^n-n+2}=+\infty$

Bài 1.15. Tính các giới hạn

a) $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ b) $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

c) $\lim\frac{2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2}{n^4}$ d) $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)$

HD Giải

a) $\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

b) Ta có $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]$

Nên $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}$

c) $\lim\frac{2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2}{n^4}=\lim\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3+1^2+2^2+3^2+...n^2}{n^4}$

$=\lim\frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^4}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}+\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{6}=\frac{1}{4}$

d) Vì $\frac{1}{\sqrt{n^3+k}}\le\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ với mọi $k\in\mathbb{N}^*$

Do đó $0<\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$

Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ nên suy ra $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^3+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}\right)=0$

Bài 1.16. Tìm các giới hạn của dãy số (u_n) sau, biết

a) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ b) $u_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$

c) $u_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ d) $u_n=\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$

HD Giải

a) Ta có $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Do đó: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. Mà $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Vậy $\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

b) Ta có $u_n\ge\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Mà $\lim\sqrt{n}=+\infty$. Vậy $\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=+\infty$

c) Ta có $\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\le u_n\le\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{1}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{1}},\forall n\in\mathbb{N}^*$

Do đó $\frac{n}{n+\sqrt{n}}\le u_n\le\frac{n}{n+1}$. Mà $\lim\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1=\lim\frac{n}{n+1}$

Vậy $\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1$

d) Ta có $\left|\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\right|\le\frac{5}{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Mà $\lim\frac{5}{n+1}=0$.

Vậy $\lim u_n = \lim \frac{3\sin n + 4\cos n}{n+1} = 0$

Bài 1.17. Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ...$

HD Giải

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, ...$ là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $|q| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Do đó $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ... = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$

Bài 1.18. Tính tổng $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ...$

HD Giải

Dãy số $-1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10^2}, ..., \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, ...$ là một cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{10}$

Vì $|q| = \left|-\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Do đó $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + ... + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + ... = \frac{-1}{1 - \left(-\frac{1}{10}\right)} = -\frac{10}{11}$

Bài 1.19. Tìm tổng cấp số nhân $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$

HD Giải

Dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

Do đó $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Bài 1.20. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,777…dưới dạng một phân số.

HD Giải

Ta có $0,777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + ...$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{7}{10}, q = \frac{1}{10}$

Do đo $0,777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + ... = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{7}{9}$

Bài 1.21. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,313131…dưới dạng một phân số.

HD Giải

$$0,313131... = \frac{31}{100} + \frac{31}{100}.\frac{1}{100} + \frac{31}{100}.\left(\frac{1}{100}\right)^2 + ... = \frac{31}{100}.\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{31}{99}$$

Bài 1.22. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn a = 1,020 202… (chu kì là 02), b = 2,131313 …(chu kì 13) và c = 2,131131131…(chu kì 131). Hãy viết a, b, c dưới dạng một phân số.

HD Giải

Ta có $a = 1,020202... = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{100^2} + ... + \frac{2}{100^n} + ... = 1 + \frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$

(vì $\frac{2}{100}, \frac{2}{100^2}, ... \frac{2}{100^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{100}$)

Ta có $b = 2,131313... = 2 + \frac{13}{100} + \frac{13}{100^2} + ... + \frac{13}{100^n} + ... = 2 + \frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99}$

Ta có $c = 2,131131131... = 2 + \frac{131}{1000} + \frac{131}{1000^2} + ... + \frac{131}{1000^n} + ... = 2 + \frac{\frac{131}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = 2 + \frac{131}{999} = \frac{2129}{999}$

Bài 1.23.

a) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

b) Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \frac{2}{3}$

HD Giải

a) Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = \frac{5}{3} & (1) \\ \frac{u_1(1-q^3)}{1-q} = \frac{39}{25} & (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được $\frac{5}{3}(1-q^3) = \frac{39}{25} \Leftrightarrow q = \frac{2}{5}$ thay vào (1), ta được $u_1 = 1$

b) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Bài 1.24. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

HD Giải

Gọi u_1 là số hạng đầu, q là công bội và S là tổng của cấp số nhân đã cho.

Khi đó $S=\dfrac{u_1}{1-q}$. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=12 & (1)\\ u_1(1-q)=\dfrac{3}{4} & (2)\\ u_1>0\end{cases}$.

Nhân (1) với (2), ta có $\begin{cases}u_1^2=9\\ u_1>0\end{cases}\Leftrightarrow u_1=3\Rightarrow q=\dfrac{3}{4}$. Vậy $u_1=3;q=\dfrac{3}{4}$

Bài 1.25. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng số hạng thứ hai là $\dfrac{12}{5}$ và tổng cấp số nhân này là 15.

HD Giải

Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases}u_1q=\dfrac{12}{5}\\ \dfrac{u_1}{1-q}=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=\dfrac{1}{5}\\ u_1=12\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}q=\dfrac{4}{5}\\ u_1=3\end{cases}$$

Bài 1.26.

a) Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 10, tổng năm số hạng đầu tiên của nó là $\dfrac{155}{16}$.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

b) Tính tổng $S=9+3+1+...+\dfrac{1}{3^{n-3}}+...$

HD Giải

a) Gọi u_1 và q là số hạng đầu và công bội của cấp số đó. Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=10 & (1)\\ \dfrac{u_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=\dfrac{155}{16} & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được $10(1-q^5)=\dfrac{155}{16}\Leftrightarrow q=\dfrac{1}{2}$ thay vào (1), ta được $u_1=5$

b) Vì $9,3,1,...,\dfrac{1}{3^{n-3}},...$ là cấp số nhân lùi vô hạn, có $q=\dfrac{1}{3}$ và $u_1=9$ nên :

$$S=9+3+1+...+\frac{1}{3^{n-3}}+...=\frac{9}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}$$

Bài 1.27. Giải phương trình $\dfrac{1}{x}+x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{7}{2}$, trong đó $|x|<1$.

HD Giải

Vì $|x|<1$, nên với $u_1=1,q=x$. Ta có $S=\dfrac{u_1}{1-q}=x+x^2+...+x^n+...=\dfrac{x}{1-x}$

Do đó: $\frac{1}{x}+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{x}+S \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x(1-x)}=\frac{7}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Bài 1.28. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=\sqrt{2} \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}; n\geq 1 \end{cases}$. Biết ($u_n$) có giới hạn khi $n\to+\infty$, hãy tìm giới hạn đó.

HD Giải

Đặt limu_n = a. Ta có $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1}=\lim\sqrt{2+u_n} \Rightarrow a=\sqrt{2+a} \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$

Vì $u_n > 0$ nên $\lim u_n = a \geq 0$. Vậy limu_n = 2.

Bài 1.29. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}; n\geq 1 \end{cases}$

Dãy số (u_n) có giới hạn hay không khi $n\to+\infty$? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

HD Giải

Ta có $u_1=\frac{1}{2}; u_2=\frac{2}{3}; u_3=\frac{3}{4}; u_4=\frac{4}{5}$. Từ đó ta dự đoán $u_n=\frac{n}{n+1}$ *(1)*

Chứng minh dự đoán trên bằng qui nạp:

- n = 1, ta có $u_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$ (đúng)
- Giả sử đẳng thức (1) đúng với n = k ($k\geq 1$), nghĩa là $u_k=\frac{k}{k+1}$. Khi đó ta có

  $u_{k+1}=\frac{1}{2-u_k}=\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}}=\frac{k+1}{k+2}$, nghĩa là đẳng thức (1) cũng đúng với n = k + 1.
- Vậy $u_n=\frac{n}{n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó ta có $\lim u_n=\lim\frac{n}{n+1}=\lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1$

Bài 1.30. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2}; n\geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$. Tìm giới hạn đó.

HD Giải

Ta có $u_1=2; u_2=\frac{3}{2}; u_3=\frac{5}{4}; u_4=\frac{9}{8}; u_5=\frac{17}{16}$. Từ đó dự đoán $u_n=\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ $;\forall n\in\mathbb{N}^*$

Chứng minh dự đoán trên bằng qui nạp (tự chứng minh)

Từ đó, $\lim u_n=\lim u_n=\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}=\lim\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]=\lim\left[1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]=1$

Bài 1.31. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+2}; n\geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n > 0$ với mọi n
b) Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

HD Giải

a) Chứng minh bằng quy nạp: $u_n > 0$ với mọi n. (1)
- Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 > 0$
- Giả sử (1) đúng với $n = k$ ($k \ge 1$), nghĩa là $u_k > 0$, ta cần chứng minh (1) cũng đúng với $n = k + 1$. Ta có $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2}$. Vì $u_k > 0$ nên $u_{k+1} = \frac{2u_k + 3}{u_k + 2} > 0$

Vậy: $u_n > 0$ với mọi n.

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \Rightarrow a = \frac{2a+3}{a+2} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$

Vì $u_n > 0$ với mọi n, nên $\lim u_n = a \ge 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = \sqrt{3}$

Bài 1.32. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3} - 6 \end{cases}$

Gọi (v_n) là một dãy số xác định bởi $v_n = u_n + 18$
a) Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn
b) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n) và tìm $\lim u_n$

HD Giải

a) Ta có $v_{n+1} = u_{n+1} + 18 = \frac{2}{3}u_n - 6 + 18 = \frac{2}{3}u_n + 12$

Thay $u_n = v_n - 18$ vào đẳng thức trên, ta được:

$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n - 18) + 12 = \frac{2}{3}v_n$.

Điều này chứng tỏ, dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{2}{3}$

b) Gọi S là tổng CSN lùi vô hạn (v_n). Khi đó $S = \frac{v_1}{1-q} = \frac{13}{1-\frac{2}{3}} = 39$

Vì $\lim v_n = 0$ nên $\lim u_n = -18$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1.33. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(2 + \frac{(-1)^n}{n+2}\right)$ b) $\lim\left(\frac{\sin 3n}{4n} - 1\right)$ c) $\lim\left(\frac{n-1}{n}\right)$ d) $\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

Bài 1.34. Tìm $\lim u_n$ với

a) $u_n = \frac{n^2 - 3n + 5}{2n^2 - 1}$ b) $u_n = \frac{-2n^2 + n + 2}{3n^4 + 5}$ c) $u_n = \frac{\sqrt{2n^2 - n}}{1 - 3n^2}$ d) $u_n = \frac{4^n}{2.3^n + 4^n}$

Bài 1.35. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n^4 - 40n^3 + 15n - 7}{n^4 + n + 100}$ b) $\lim \frac{2n^3 + 35n^2 - 10n + 3}{5n^5 - n^3 + 2n}$

c) $\lim \frac{\sqrt{6n^4 + n + 1}}{2n + 1}$ d) $\lim \frac{3.2^n - 8.7^n}{4.3^n + 5.7^n}$

e) $\lim \dfrac{2^{n+1}\left(3.2^n - 3^{n-2}\right)}{3^n\left(2^{n-1}+4\right)}$ f) $\lim \dfrac{2^n\left(3^{n-1} - 5.2^n\right)}{3^{n-1}\left(2^n+4\right)}$

Bài 1.36. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{(-3)^n + 2.5^n}{1-5^n}$ b) $\lim \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2+n+1}$

c) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+n-1}\right)$ d) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

e) $\lim \dfrac{8^{2n+3} - 3^{3n+2}}{4^{3n+4}+5^{2n+3}}$ f) $\lim \dfrac{2^{6n+3} - 3^{3n+5}}{4^{3n+4}+7^{2n+3}}$

Bài 1.37. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng một phân số

a) 0,444… b) 0,212121… c) 0,32111111…
d) 0,51111… e) 0,393939… f) 0,27323232…

Bài 1.38.

a) Tìm tổng cấp số nhân $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots, \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$

b) Tính tổng $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + (0,9)^3 + \ldots + (0,9)^{n-1} + \ldots$

Bài 1.39. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

a) Tìm số n sao cho $\left|u_n - 3\right| < \dfrac{1}{1000}$

b) Chứng minh rằng với mọi $n > 999$ thì các số hạng của dãy số (u_n) đều nằm trong khoảng (2,999; 3,001)

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Giới hạn hữu hạn

- Cho khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số $f(x)$ xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.
- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

2. Giới hạn vô cực

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$.
- Cho khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số $f(x)$ xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$). $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ thì $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[-f(x) \right] = -\infty$

3. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1.

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = L \pm M$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[k.f(x) \right] = k.\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k.L; (k \in \mathbb{R})$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = L.M$

d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$)

e) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

Các tính chất trên vẫn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$

Định lí 2. (Định lí giới hạn một bên)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

4. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ (c là hằng số).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số lẻ; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số chẵn

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \tan x = -\dfrac{\pi}{2}$

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ hoặc $\left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty\right)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$ được tính:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x).g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		–	$-\infty$
$L < 0$		+	$-\infty$
		–	$+\infty$

4. Khử các dạng vô định

Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp định lí về giới hạn, ta phải biến đổi biểu thức xác định hàm số về dạng áp dụng được các định lí này.

Dạng 1. Tính $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (hay dạng $\dfrac{0}{0}$)

- Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể ta biến đổi như sau:
  $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(x - x_0)A(x)}{(x - x_0)B(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$ và tính $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{A(x)}{B(x)}$
- Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa biến dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp, trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

Dạng 2. Tính $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$ (hay dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

- Ta chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x (hay phân tích tử và mẫu thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).
- Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho lũy thừa của x.

Dạng 3. Tính $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ (hay dạng $\infty-\infty$) hoặc

Tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x).g(x)$ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ (hay dạng $0.\infty$)

- Nhân chia với biểu thức liên hợp(nếu có biểu thức chứa biến dưới dấu căn thức) hoặc quy đồng mẫu để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức)

B. BÀI TẬP

Bài 2.1. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{-2\right\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\neq -2$ và $x_n\to -2$ khi $n\to +\infty$ (hay $\lim x_n=-2$)

Ta có $\lim f(x_n)=\lim\dfrac{x_n^2-4}{x_n+2}=\lim\dfrac{(x_n+2)(x_n-2)}{x_n+2}=\lim(x_n-2)=-4$

Vậy $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{1\right\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\neq 1$ và $x_n\to 1$ khi $n\to +\infty$ (hay $\lim x_n=1$)

Ta có $\lim f(x_n)=\lim\dfrac{2x_n^2+x_n-3}{x_n-1}=\lim\dfrac{2(x_n-1)\left(x_n+\dfrac{3}{2}\right)}{x_n-1}=\lim 2\left(x_n+\dfrac{3}{2}\right)=5$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=5$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$

Hàm số xác định trên $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ và $x=4\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$ và $x_n\to 4$ khi $n\to +\infty$

Ta có $\lim f(x_n)=\lim\dfrac{x_n+1}{3x_n-2}=\dfrac{4+1}{3.4-2}=\dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$. Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì và $x_n\to +\infty$ khi $n\to +\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2-5x_n^2}{x_n^2+3} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{x_n^2}-5}{1+\dfrac{3}{x_n^2}} = -5$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-5x^2}{x^2+3} = -5$

Bài 2.2. Dùng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{3-x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\cos\dfrac{1}{x}\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{3-x}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x+3}{3-x}$

Hàm số xác định trên $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ và $x=5\in(3;+\infty)$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\in(3;+\infty)$ và $x_n\to 5$ khi $n\to+\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n+3}{3-x_n} = \dfrac{5+3}{3-5} = -4$. Vậy $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{3-x} = -4$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì và $x_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^3+1}{x_n^2+1} = \lim \dfrac{x_n+\dfrac{1}{x_n^3}}{1+\dfrac{1}{x_n^2}} = +\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n\to -1$ khi $n\to+\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2-3x_n-4}{x_n+1} = \lim \dfrac{(x_n+1)(x_n-4)}{x_n-1} = \lim(x_n-4) = -5$

Vậy $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} = -5$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$

Hàm số xác định trên $(-\infty;5)$ và $x=1\in(-\infty;5)$

Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n\in(-\infty;5)$ và $x_n\to 1$ khi $n\to+\infty$

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{\sqrt{5-x_n}} = \dfrac{1}{\sqrt{5-1}} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5-x}} = \dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\cos\dfrac{1}{x}\right)$. Xét hàm số $f(x) = x.\cos\dfrac{1}{x}$.

Với mọi dãy (x_n) mà $x_n\neq 0$ với mọi n và $\lim x_n = 0$

Ta có $f(x_n) = x_n.\cos\frac{1}{x_n}$. Vì $|f(x_n)| = |x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right| \le |x_n|$ và $\lim|x_n| = 0$

Nên $\lim f(x_n) = 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\cos\frac{1}{x}\right) = 0$

Bài 2.3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-x+1}{x^2+2x}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(2\sqrt{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}}{\lim\limits_{x\to 3}2.\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}x.\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}2.\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}x}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to -1}\frac{x-2}{x^2} = -3$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-x+1}{x^2+2x} = \frac{4}{-1} = -4$

Bài 2.4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{9-1}{-3+1} = -4$

b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}\frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(2-x) = 4$

c) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x+3}+3\right)} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+3\right)} = \frac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right) = \sqrt{4+5}-1 = 2$

Bài 2.5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3+15}{(x+2)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2-x)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\left[-\left(\sqrt{x+7}+3\right)\right]=-6$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}=\dfrac{9-6-3}{3-1}=0$

d) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+15}{(x+2)^2}$. Ta có $\lim\limits_{x\to -2}(2x^3+15)=-1<0$ và $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)^2=0$.

Nên $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^3+15}{(x+2)^2}=-\infty$

$e)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x-1)\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]=3$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5-9}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=-\dfrac{2}{3}$

Bài 2.6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$ b) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}=\dfrac{1-1^3}{(2.1-1)(1^4-3)}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{\left(9x-x^2\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{x\left(9-x\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}=-\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{x}+3\right)}=-\dfrac{1}{54}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^4+3x-1}{2x^2-1}}=\sqrt{\dfrac{2^4+3.2-1}{2.2^2-1}}=\sqrt{3}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$. Với mọi $x\neq 0$, ta có $x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=(x-1)$.

Nên $\lim\limits_{x\to 0}x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$

Bài 2.7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}$ c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}}$

d) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-8\right|$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3}$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left|x+1\right|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|3-4\right|=1$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{2x(x+1)}{x^2-6}}=2$ d) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-8\right|=5$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x^3}-3x}{2x^2+x-3}=3$ f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left|x+1\right|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}=3$

Bài 2.8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x^2-x+1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=-2$

$c)\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{2}$

$d)\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^2-x-4x^2}{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{|x|\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}-2x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{-x\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}-2x}=\dfrac{1}{4}$

Bài 2.9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{17}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{17}{x^2+1}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=3$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}{5-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}{5-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}{\dfrac{5}{x}-2}=-1$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+1}{3-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{2}{3}$

Bài 2.10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x & ;x\ge 0\\ 1-x & ;x<0\end{cases}$

Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0$.

Phương pháp: Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to x_0$ ta thường làm như sau

- Chọn hai dãy số khác nhau (x_n) và (y_n) thỏa mãn: x_n và y_n thuộc tập xác định của hàm số $y=f(x)$ và khác x_0; $x_n\to x_0; y_n\to x_0$
- Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\ne\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)$ hoặc chứng minh một trong các giới hạn này không tồn tại.

Lưu ý: Trường hợp $x\to x_0^+; x\to x_0^-$ hay $x\to\pm\infty$ chứng minh tương tự.

HD Giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Lấy dãy số (x_n) với $x_n=\dfrac{1}{n}$. Ta có $x_n\to 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ (1)

Lấy dãy số (y_n) với $y_n=-\dfrac{1}{n}$. Ta có $y_n\to 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$ *(2)*

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) không có giới hạn khi $x\to 0$

Bài 2.11.

a) Cho hai dãy số có dạng tổng quát là $u_n=\dfrac{1}{n^3}$ và $v_n=\dfrac{2}{4n+1}$. Tính limu_n và limv_n.

b) Dùng kết quả câu a), chứng minh rằng hàm số $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$

HD Giải

a) $\lim u_n=\lim\dfrac{1}{n^3}=0,\lim v_n=\lim\dfrac{2}{4n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{2}{n}}{4+\dfrac{1}{n}}=0$ (1)

b) Hàm số $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ta có u_n, v_n đều thuộc $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, với mọi n và

$\lim f(u_n)=\lim\sin\frac{\pi}{\frac{1}{n^3}}=\sin n^3\pi=0$,

$\lim f(v_n)=\lim\sin\frac{\pi}{\frac{2}{4n+1}}=\lim\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=\lim\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$

Vì $\lim u_n=\lim v_n=0$, nhưng $\lim f(u_n)\neq\lim f(v_n)$ nên hàm số $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$

Bài 2.12. Chứng minh rằng hàm số $y=\sin x$ không có giới hạn khi $x\to+\infty$

HD Giải

Xét hai dãy số (x_n) với $x_n=2n\pi$ và (y_n) với $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi (n\in\mathbb{N}^*)$

Ta có $\lim x_n=\lim 2n\pi=+\infty$, $\lim y_n=\lim\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\lim n\left(\frac{\pi}{2n}+2\pi\right)=+\infty$

$\lim\sin x_n=\lim\sin 2n\pi=\lim 0=0$, $\lim\sin y_n=\lim\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=\lim 1=1$

Vì $\lim x_n=\lim y_n=+\infty$ nhưng $\lim f(x_n)\neq\lim f(y_n)$ nên hàm số $f(x)=\sin x$ không có giới hạn khi $x\to 0$

Bài 2.13. Chứng minh rằng hàm số $y=\cos\frac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x\to 0$

HD Giải

Chọn hai dãy số có số hạng tổng quát là $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ và $y_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$

Làm tương tự như bài 2.12.

Bài 2.14. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1; & x\geq 0\\ 2x; & x<0\end{cases}$.và các dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{n}$ và (v_n) với $v_n=-\frac{1}{n}$. Tính $\lim u_n;\lim v_n;\lim f(u_n);\lim f(v_n)$

HD Giải

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{1}{n}=0, \lim v_n=\lim\left(-\frac{1}{n}\right)=0$

Do $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\frac{1}{n}>0$ và $v_n=-\frac{1}{n}<0$. Nên $f(u_n)=\sqrt{\frac{1}{n}}+1$ và $f(v_n)=-\frac{2}{n}$

Từ đó $\lim f(u_n)=\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+1\right)=1;\lim f(v_n)=\lim\left(-\frac{2}{n}\right)=0$

Vì $\lim u_n=\lim v_n=0$ nhưng $\lim f(u_n)\neq\lim f(v_n)$ nên hàm số $y=f(x)$ không có giới hạn khi $x\to 0$

Bài 2.15. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2; & x\geq 1\\ x^2-3; & x<1\end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\lim\limits_{x\to 1^+}f(x),\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

HD Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x^2-3) = -2$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(5x+2) = 7$

Vì $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ không tồn tại

Bài 2.16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3; & x\le 2 \\ 4x-3; & x>2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to2^-} f(x), \lim\limits_{x\to2^+} f(x), \lim\limits_{x\to2} f(x)$

HD Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(x^2-2x+3) = 3$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}(4x-3) = 5$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ không tồn tại

Bài 2.17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2}; -3\le x<3 \\ 1; & x=3 \\ \sqrt{x^2-9}; & x>3 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{x\to3^-} f(x), \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ (nếu có)

HD Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-}\sqrt{9-x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+}\sqrt{x^2-9} = 0$

Do đó $\lim\limits_{x\to3} f(x) = 0$

Bài 2.18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}; & x>1 \\ mx+2; & x\le 1 \end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to1$? Tìm giới hạn này.

HD Giải

Ta có

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)} = 1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(mx+2) = m+2$$

$f(x)$ có giới hạn khi $x\to1 \Leftrightarrow$ m + 2 = 1 $\Leftrightarrow$ m = 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1$

Bài 2.19. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-5x^2+7\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4-3x+12}$

HD Giải

a) Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0$, $x - 1 < 0$ với mọi x và $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-3) = -1 < 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$, $x - 1 > 0$ với mọi x và $\lim\limits_{x\to1^+}(2x-3) = -1 < 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x-1} = -\infty$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1) = 0$, $x - 1 < 0$ với mọi x và $\lim\limits_{x\to1^-}(2x-7) = -5 < 0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-7}{x-1}=+\infty$

d) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$, $x - 1 > 0$ với mọi x và $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-7)=-5<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-7}{x-1}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-5x^2+7\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)=2>0$

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-5x^2+7\right)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^4-3x+12}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{12}{x^4}}=+\infty$

Bài 2.20. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$ c) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ d) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

HD✍Giải

a) Với mọi $x > 0$, ta có $\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{2}{-1}=-2$

b) Với mọi $x < 2$, ta có

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)\sqrt{2-x}=0$$

c) Với mọi $x > -1$, ta có

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x+1)(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2}=0$$

d) Với mọi $-3 < x < 3$, ta có

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{(3-x)(4-x)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Bài 2.21. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$ c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$

HD✍Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x-x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\left(2+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=0$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x-2}}=+\infty$

Bài 2.22. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{2x-1}$ c) $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}$

d) $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+1}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\dfrac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=-\dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}$. Với mọi $x<-3$, ta có $\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}=\dfrac{x^4+1}{x+1}.\dfrac{1}{x+3}$

Vì $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{x^4+1}{x+1}=-41<0$ và $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{1}{x+3}=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to (-3)^-}\dfrac{x^4+1}{x^2+4x+3}=+\infty$

$d)$ $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{\sqrt{8+2x}-2}{\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{8+2x-4}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{8+2x}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{2(x+2)}{\sqrt{x+2}\left(\sqrt{8+2x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{8+2x}+2}=0$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}$. Vì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}=\sqrt{3}>0$.

Nên $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{(x-2)^2}.\sqrt{\dfrac{x+4}{4-x}}=+\infty$

$f)$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{4+x^2}}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-4}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+|x|\sqrt{\dfrac{4}{x}+1}}$

$=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{4}{x}+1}}=-\dfrac{1}{2}$

Bài 2.23. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$ b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

HD✍Giải

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(4+\sqrt{x^2+16}\right)}{-x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4+\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+1}+1}=-4$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=1$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^2}+1}=2$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1-(x+2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x-1}{x^2-4}=-\infty$

Bài 2.24. Tính các giới hạn sau**:**

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6-3x}{\sqrt{2x^2+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+x^2+\ldots+x^n-\dfrac{n}{1-x}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-1}}{2-3x}$

HD✍Giải

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{6-3x}{\sqrt{2x^2+1}}=4$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\left(x^2-4\right)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}=\dfrac{1}{16}$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}=-\infty$ (Vì khi $x\to 2^+$ thì $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0$ và $x-2>0$ còn $x^2-3x+1\to -1$)

d) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+x^2+\ldots+x^n-\dfrac{n}{1-x}\right)$. Khi $x\to 1^-$ thì $|x|<1$ nên theo tổng của cấp số nhân lùi vô hạn, ta có: $x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x}{1-x}$. Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{n}{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-n}{1-x}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-1}{x+3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=2$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\sqrt{4x^2-1}}{2-3x}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt{4-\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{2}{x}-3}=\dfrac{1}{3}$

Bài 2.25. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x+10}{x^3+6}$ b) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+11x+30}{25-x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6+4x^2+x-2}{\left(x^3+2\right)^2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x-40}{2x^5+7x^4+21}$ e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x^2}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$

HD Giải

a) 2; b) $\dfrac{1}{10}$;

c) 1; d) 0

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{2x^4+4x^2+3}}{2+\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{2x^2+4+\dfrac{3}{x^2}}}{2+\dfrac{1}{x}}=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+1)^2(x+1)}{x^2(2x+1)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(2x+1)(x+1)}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\sqrt{2}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{5x^2+1}+x\sqrt{5}}=0$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}{1+\dfrac{1}{x}}=2$

Bài 2.26. Tìm giới hạn các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{3-\sqrt{x+7}}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x-1}}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

g) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$ h) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5}$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{3-\sqrt{x+7}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{2-x}=-\lim\limits_{x\to2}\left(3+\sqrt{x+7}\right)=-6$

$$b)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}-3\right)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{2x+7}+3\right)}=2.\frac{4}{6}=\frac{4}{3}$$

$$c)\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1}\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{1}\right)=6$$

$$d)\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+1}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+1\right)}\right)=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+1}+\frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{(x-1)\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+1}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}\right)=\sqrt{2}\ \text{(vì } x\to1^+\Rightarrow x-1>0\text{)}$$

$$e)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}-\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1}\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}-\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{\left(\sqrt{1-x}+1\right)}-\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1}\right)}=-\frac{1}{6}$$

$$f)\lim_{x\to1}\frac{(3x-2)-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{\left((3x-2)-\sqrt{4x^2-x-2}\right)\left((3x-2)+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left((3x-2)+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-11x+6}{\left(x^2-3x+2\right)\left((3x-2)+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(5x+6)}{(x-1)(x-2)\left((3x-2)+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{5x+6}{(x-2)\left((3x-2)+\sqrt{4x^2-x-2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$g)\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1^-}\frac{|x-1|\sqrt{(x-2)}}{(x-1)(x-4)}=-\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)\sqrt{(x+2)}}{(x-1)(x-4)}=\frac{-\sqrt{3}}{-3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$h) \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}-\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1-(x-2)}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)}{(x+2)(x^2+x+1)}=\dfrac{2}{9}$

$k) \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left(\sqrt{x-4}-1\right)-\left(\sqrt{x+4}-3\right)}{x-5}$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x-5}\left[\dfrac{\left(\sqrt{x-4}-1\right)\left(\sqrt{x-4}+1\right)}{\sqrt{x-4}+1}-\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{\sqrt{x+4}+3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x-5}\left[\dfrac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}-\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+3}\right]=\dfrac{1}{3}$

Bài 2.27. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-4}+3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}+2x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+2x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-x^2+4x+5}{x^4-x+3}$

HD Giải

$a) \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8x+8}{(x-2)^2(x-1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{2}{-1}=-2$

$b) \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-4}+3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}+2x-5}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+3x+1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+2x-5}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+2-\dfrac{5}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}}+3+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+2-\dfrac{5}{x}}=\dfrac{4}{3}$

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-4}+3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}+2x-5}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}}-3-\dfrac{1}{x}\right)}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}}-2+\dfrac{5}{x}\right)}=2$

$c) \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)\left(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}\right)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{2}$$

<u>Lưu ý</u>:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5-\frac{4}{x}}{-\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = -\frac{5}{2}$$

$$e) \lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+2x+1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2-3x-1)} = \lim_{x\to1} \frac{x-2}{x^2-3x-1} = \frac{1}{3}$$

$$f) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+4x+5}{x^4-x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{x\left(1-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)} = 0$$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

<u>**Bài 2.28.**</u> Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x-3)^3}$ b) $\lim_{x\to(-2)^+} \frac{4x^4-3}{2x^2+3x-2}$

c) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3-x^2-x+10}{x^2+3x+2}$ d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

<u>**Bài 2.29**</u>. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$ b) $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$ d) $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

<u>**Bài 2.30.**</u> Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & nếu\ \ x<1\\ mx+2\ nếu & x\ge1\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to1$?

<u>**Bài 2.31.**</u> Cho hàm số $f(x)=\frac{5-x}{|x-5|}$. Tìm các giới hạn sau: $\lim_{x\to5^+} f(x), \lim_{x\to5^-} f(x)$ và $\lim_{x\to5} f(x)$ (nếu có).

Bài 2.32. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2|x|\text{-}1 \ \textit{nếu} \ \ x\le -2 \\ \sqrt{2x^2+1} \ \textit{nếu} \ \ x>2 \end{cases}$. Tìm các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (nếu có).

Bài 2.33. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(1-2x)}{x^2+x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to 11}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-9x-22}{(x-11)(x^2-3x+16)}}$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+8x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to(-4)^-}\left(\dfrac{2}{x^2+3x-4}-\dfrac{3}{x+4}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+7x-18}{\sqrt{3x-2}-2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ h) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+1-\sqrt{2x^2+9x-1}}{x^3+3x^2-9x-2}$ k) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hàm số liên tục

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng *K* và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó
- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ nếu nó liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
- Đồ thị hàm số liên tục trên một khoảng được biểu thị bởi một "đường liền" trên khoảng đó.

2. Các định lí

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lí 2.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0.

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0, nếu $g(x_0) \ne 0$

Định lí 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$

Mệnh đề tương đương

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (*a; b*).

B. BÀI TẬP

Bài 3.1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ tại $x_0 = 3$

HD✍Giải

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\left\{2\right\}$, do đó xác định trên khoảng $(2;+\infty)$ chứa $x_0 = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x}{x-2} = 3 = f(3)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 3.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 2x}{x-1} & khi\ \ x \ne 1 \\ 5 & khi\ \ x = 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD✍Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \ne 1$ thì $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{x-1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Nếu $x = 1$, ta có $f(1) = 5$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x(x-1)}{x-1} = 2 \neq f(1)$

Vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

Bài 3.3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & khi\ \ x \neq 3 \\ 5 & khi\ \ x = 3 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$

Nếu $x = 3$, ta có $f(3) = 5$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-3} = 4 \neq f(3)$

Vì $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$, $(3;+\infty)$ và gián đoạn tại $x = 3$

Bài 3.4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$.

HD Giải

Hàm số đã cho xác định trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Với mọi $x_0 \in (-1;1)$, ta có

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2} = f(x_0)$, nên hàm số liên tục trên khoảng $\left(-1;1\right)$

Ngoài ra, ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\sqrt{1-x^2} = 0 = f(1)$

Do đó $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$

Bài 3.5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$ liên tục trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$

HD Giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$ nếu nó liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1)$ Vì với mỗi $x_0 \in (-1;+\infty)$, ta có

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x+1} = \sqrt{x_0+1} = f(x_0)$, nên hàm số liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Ngoài ra, ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1} = 0 = f(-1)$

Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$

Bài 3.6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & nếu\ \ x \neq 2 \\ 5 & nếu\ x = 2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq 2$ thì $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

Nếu $x = 2$, ta có $f(2) = 5$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = 12 \neq f(2)$

Vì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$, nên hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$ và gián đoạn tại $x = 2$

Bài 3.7. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ 5-x & \text{nếu } x \le 2 \end{cases}$ tại $x = 2$

HD Giải

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x > 2 \\ 5-x & khi\ x \le 2 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có $f(2) = 3$. (1)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3$ (2)

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(5-x) = 3$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Bài 3.8. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{nếu } x < 1 \\ -2x & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$ tại $x = 1$

HD Giải

Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{nếu } x < 1 \\ -2x & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Ta có $f(1) = -2$. (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{1-x} = -2$ (2)

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-2x) = -2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2 = f(1)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 3.9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1} & \text{nếu } x \neq -1 \\ 1 & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định của nó.

HD Giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \neq -1$ thì $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1}$.

Đây là hàm số phân thức hữu tỉ có tập xác định là $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

Vậy nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

Nếu $x = -1$, ta có $f(-1) = 1$ và $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1} = \lim_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)} = 1$

Vì $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$, nên hàm số liên tục tại $x = -1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.10. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 2x - 5 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

HD✍Giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 5$

Ta có $f(0) = -5$ và $f(2) = 7$. Do đó $f(0).f(2) < 0$

$y = f(x)$ làm hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên đoạn [0; 2]. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0;2)$

Bài 3.11. Chứng minh rằng phương trình:

a) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm

b) $\cos x = x$ có nghiệm

HD✍Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn [0; 1] và [1; 2] (1)

Mặt khác, ta có

$f(0) = 1$; $f(1) = -3$ và $f(2) = 5$. Do đó $f(0).f(1) < 0$ và $f(1).f(2) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ta $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng (0; 1), còn nghiệm kia thuộc khoảng (0; 2)

b) Xét $f(x) = \cos x - x$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ (1)

Mặt khác, ta có $f(0) = 1$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Do đó $f(0).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuôc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài 3.12. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^5 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm

b) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm thuộc trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\pi\right)$

c) $\sqrt{x^3+6x+1} - 2 = 0$ có nghiệm dương

d) $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;3)$

HD✍Giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x - 7$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn [0; 2] (1)

Mặt khác, ta có

$f(0) = -7 < 0$; $f(2) = 19 > 0$ f(2) = 19 > 0 . Do đó $f(0).f(2) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ta $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng (0; 2)

Vậy $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

b) Xét $f(x) = \cos 2x - 2\sin x + 2$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$ và $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ (1). Mặt khác, ta có

$f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{7}{2};f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ và $f\left(\pi\right)=3$. Do đó $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right).f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$ và $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right).f\left(\pi\right)<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuôc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

c) Ta có $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0 \Leftrightarrow x^3+6x+1=4 \Leftrightarrow x^3+6x-3=0$
Xét hàm số $f(x)=x^3+6x-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn [0; 1] (1)
Mặt khác, ta có: $f(0)=-3$; $f(1)=4$. Do đó $f(0).f(1)<0$ (2)
Từ (1) và(2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (0; 1)
Vậy phương trình $\sqrt{x^3+6x+1}-2=0$ có ít nhất một nghiệm dương.
d) Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^3+1$ liên tục trên $\mathbb{R}$
Nên $f(x)$ liên tục trên đoạn [-1; 1] chứa trong $\left[-1;3\right]$. Mặt khác, ta có
$f(-1)=5$ và $f(1)=-1$. Do đó $f(-1).f(1)<0$
Suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (-1; 1) chứa trong khoảng $\left(-1;3\right)$.
Vậy $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(-1;3\right)$.

Bài 3.13. Chứng minh rằng phương trình:
a) $x^5-3x^4+5x-2=0$ có ít nhất ba nghiệm trong khoảng $\left(-2;5\right)$.
b) $x^5-5x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm
c) $x^3+3x^2-4x-7=0$ có nghiệm hay không trong khoảng $\left(-4;0\right)$?

HD✍Giải

a) Xét hàm số $f(x)=x^5-3x^4+5x-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$
Nên $f(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1], [1; 2] và [2; 3] chứa trong $\left[-2;5\right]$.
Mặt khác, ta có
$f(0)=-2$ và $f(1)=1$, $f(2)=-8$ và $f(3)=13$. Do đó $f(0).f(1)<0$, $f(1).f(2)<0$ và $f(2).f(3)<0$
Suy ra $f(x)=0$ có ba nghiệm, một nghiệm thuộc trong khoảng (0; 1), một nghiệm thuộc trong khoảng (1; 2) và nghiệm còn lại thuộc trong khoảng (2; 3).
Vậy $f(x)=0$ có ba nghiệm trong khoảng $\left(-2;5\right)$
b) Xét hàm số $f(x)=x^5-5x-1$ tương tự như câu a), trên các đoạn $\left[-2;-1\right],\left[-1;0\right]$ và [0;3]
c) Xét hàm số $f(x)=x^3+3x^2-4x-7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Mặt khác, vì $f(0).f(-2)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $\left(-2;0\right)$. Do đó có nghiệm trong khoảng $\left(-4;0\right)$.

Bài 3.14. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m: $(1-m^2)x^5-3x-1=0$

HD✍Giải

Xét hàm số $f(x)=(1-m^2)x^5-3x-1$, là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $\left[-1;0\right]$
Mặt khác, ta có
$f(0)=-1<0$ và $f(1)=m^2+1>0$ nên $f(1).f(0)<0$, với mọi m
Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc trong khoảng $\left(-1;0\right)$, nghĩa là phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 3.15. Chứng minh rằng phương trình: $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

HD✍Giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $\left[-2;-1\right]$. Mặt khác, ta có

$f(-1) = -1 < 0$ và $f(-2) = m^2 + 2 > 0$ nên $f(-1).f(-2) < 0$, với mọi m

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít một nghiệm thuộc trong khoảng $\left(-2;-1\right)$ với mọi m. Nghĩa là phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Bài 3.16. Chứng minh rằng các phương trình:

a) $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

b) $\sin x = x - 1$ có ít nhất một nghiệm

c) $x^4 - 3x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 3)$ không ?

HD✍Giải

a) Hàm số $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]$. Mặt khác, ta có

$f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$ nên $f(0).f(\pi) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

b) Hàm số $f(x) = \sin x - x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $\left[0;\pi\right]$. Mặt khác, ta có

$f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = \pi - 1 > 0$ nên $f(0).f(\pi) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

c) Hàm số $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó liên tục trên đoạn $\left[-1;0\right]$. Mặt khác, ta có

$f(0) = -1 < 0, f(-1) = 2 > 0$ nên $f(-1).f(0) < 0$. Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;0\right)$ chứa trong $\left(-1;3\right)$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(-1;3\right)$.

Bài 3.17. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} & \text{nếu } x < 2 \\ mx + m + 1 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

HD✍Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(2) = 3m + 1$. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (xm + m + 1) = 3m + 1 = f(2)$ và

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{2}$$

Để hàm số liên tục tại x = 2 khi và chỉ khi $3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$

Dễ thấy với mọi m, hàm số f liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -\frac{1}{6}$.

Bài 3.18. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

HD✍Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có $f(2) = m$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$

Để hàm số f liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow m = 3$

Vậy $m = 3$ thì hàm số f liên tục tại $x = 2$.

Bài 3.19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x > 1 \\ mx + 2 & \text{nếu } x \le 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

HD Giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có. $f(1) = m + 2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2 + x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$

Và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2) = m + 2 = f(1)$

Để $f(x)$ liên tục tại x = 1 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Bài 3.20. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & \text{nếu } x \ne \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{nếu } x = \sqrt{2} \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2} & \text{nếu } x \ne 2 \\ 3 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

HD Giải

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}; & \text{khi } x \ne \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}; & \text{khi } x = \sqrt{2} \end{cases}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Nếu $x \ne \sqrt{2}$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $\left(-\infty; \sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

Tại $x = \sqrt{2}$. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x-\sqrt{2}} = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} = f\left(\sqrt{2}\right)$

Do đó hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}; & \text{khi } x \ne 2 \\ 3; & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Nếu $x \ne 2$ thì $f(x) = \dfrac{1-x}{(x-2)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên nó liên tục trên các khoảng $\left(-\infty; 2\right)$ và $\left(2; +\infty\right)$.

Tại x = 2, ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty \ne f(2)$

Do đó hàm số $f(x)$ không liên tục tại x = 2.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$ và gián đoạn tại x = 2.

Bài 3.21. Tìm số thực *a* sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{nếu } x \le 2 \\ (1-a)x & \text{nếu } x > 2 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}$$

HD Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x^2\right) = 4a^2 = f(2)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(1-a\right)x = 2(1-a)$

Hàm số f liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $4a^2 = 2(1-a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Hiển nhiên hàm số *f* liên tục tại mọi điểm $x \ne 2$ với mọi a

Vậy hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a = -1, a = \dfrac{1}{2}$

Bài 3.22.

a) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 1000x^2 + 0,1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm

b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 1000x^2 - 0,01 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương

c) CMR với mọi số thực *a, b, c,* phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm

HD Giải

a) Hàm số $f(x) = x^3 + 1000x^2 + 0,1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(0) = 0,1 > 0$. Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại một số thực a sao cho $f(a) < 0$
Vì $f(0).f(a) < 0$ nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (a;0)$ sao cho $f(c) = 0$. Vậy $x = c$ là một nghiệm âm của phương trình đã cho.

b) Hàm số $f(x) = x^3 - 1000x^2 - 0,01$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(0) = -0,01 < 0$. Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại một số thực b đủ lớn sao cho $f(b) > 0$
Vì $f(0).f(b) < 0$ nên, theo hệ quả của định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại một số thực $c \in (0;b)$ sao cho $f(c) = 0$. Vậy $x = c$ là một nghiệm dương của phương trình đã cho.

c) Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực *a, b, c*.

Bài 3.23. Tìm các giá trị của *a* và *b* để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} ax - b & \text{nếu } x \le 1 \\ 3x & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ bx^2 - a & \text{nếu } x \ge 2 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ và gián đoạn tại } x = 2.$$

HD Giải

Hàm số liên tục tại x = 1 và gián đoạn tại x = 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 4b - a \ne 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b \ne 3 \end{cases}$$

Bài 3.24. Tìm *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & nếu\ \ x\neq 1\\ m^2x & nếu\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

HD Giải

Ta có $f(1)=m^2$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{1}{4}$

Để hàm số liên tục tại x = 1thì $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$

C. BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 3.25. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=x^2+x+3+\dfrac{1}{x-2}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 3.26. Chứng minh rằng phương trình $x^3+x+1=0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn – 1.

Bài 3.27. Chứng minh rằng các phương trình $m\left(2\cos x-\sqrt{2}\right)=2\sin 5x+1$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Bài 3.28. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^5+x^2}{x^2+x} & nếu\ x\neq 1\ và\ x\neq 0\\ -3 & nếu\ x=-1\\ 0 & nếu\ x=0\end{cases}$$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3.29. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & nếu\ \ x\neq 2\\ 1 & nếu\ \ x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

Bài 3.30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3} & nếu\ \ x\neq 3\\ (m-1)x & nếu\ \ x=3\end{cases}$. Tìm m để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=3$.

Bài 3.31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6x+7}-x}{x^2-8x+7} & nếu\ \ x>7\\ 2ax^2-6ax+1 & nếu\ \ x\leq 7\end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=7$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n}+\dfrac{\cos n}{4^n}\right)$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\left(2-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{1}{n^3}-4\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3}-4}=-\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n}+\dfrac{\cos n}{4^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n}+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{4^n}$

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)=2$. $\left|\dfrac{\cos n}{4^n}\right|\le\dfrac{1}{4^n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{4^n}=0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{n}+\dfrac{\cos n}{4^n}\right)=2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}3+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n}=3$ (Vì $\left|\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right|\le\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\to 0\ khi\ n\to+\infty$)

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)$ b) $\lim\dfrac{\sqrt{n^4-2n+3}}{-2n^2+3}$

c) $\lim\sqrt[3]{n^9+8n^2-7}$ d) $\lim\dfrac{5^n-7^n}{3^n+2.7^n}$

HD Giải

$a)\lim\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}\right)=\lim\dfrac{n^2+3n+1-\left(n^2+2n-1\right)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+2n-1}}$

$=\lim\dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+2n-1}}=\lim\dfrac{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}\right)}$

$=\lim\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{2}$

$b)\lim\dfrac{\sqrt{n^4-2n+3}}{-2n^2+3}=\lim\dfrac{n^2\sqrt{1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{3}{n^4}}}{n^2\left(-2+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\lim\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{3}{n^4}}}{-2+\dfrac{3}{n^2}}=-\dfrac{1}{2}$

$c)\lim\sqrt[3]{n^9+8n^2-7}=\lim n^3\sqrt[3]{1+\dfrac{8}{n^7}-\dfrac{7}{n^9}}=+\infty$ (vì $\lim n=+\infty;\lim\sqrt[3]{1+\dfrac{8}{n^7}-\dfrac{7}{n^9}}=1>0$)

$$d)\lim\frac{5^n-7^n}{3^n+2.7^n}=\lim\frac{\frac{5^n}{7^n}-1}{\frac{3^n}{7^n}+2}=\lim\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+2}=-\frac{1}{2}$$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$

HD Giải

$$a)\lim_{x\to1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}=\frac{4.1^5+9.1+7}{3.1^6+1^3+1}=4$$

$$b)\lim_{x\to2}\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(x^2+5x+1\right)}{(x-2)\left(x^2+2x+3\right)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}=\frac{15}{11}$$

$$c)\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(x+1\right)\left(\sqrt{6x^2+3}-3x\right)}{3-3x^2}=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{3(1-x)}=1$$

$$d)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5x+4x^2}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=\lim_{x\to0}\frac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3}=\frac{5}{6}$$

$$e)\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2-x}{\left(x-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(10-x\right)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4\right)}$$

$$=-\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(10-x\right)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}=-\frac{1}{12}$$

$$f)\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}=\lim_{x\to1}\frac{7(1-x)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{8(1-x)\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{7\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{7x-3}\right)}{8\left(\sqrt{x+8}+\sqrt{8x+1}\right)}=\frac{7}{12}$$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+1}-x\sqrt{3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to3^-}\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$ e) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ f) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

HD Giải

$$a)\ \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$$b)\ \lim_{x\to7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to7}\frac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\lim_{x\to7}\frac{1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+x+1}-x\sqrt{3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+x+1}+x\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{(x-3)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}{\left(3-\sqrt{6x-x^2}\right)\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{3+\sqrt{6x-x^2}}{x-3}$

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}\left(3+\sqrt{6x-x^2}\right)=6>0,\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0$ và $x-3<0$ với mọi $x<3$

Do vậy $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}=-\infty$

e) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4x+12}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{3}{2}$

Bài 5. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}$ b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ e) $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

HD Giải

a) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)(x+9)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+4}{x+9}=\dfrac{12}{7}$

b) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)\left(2x^2+x+1\right)}{(x-3)\left(4x^2-x+1\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1}=\dfrac{11}{17}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+3)^3-27}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+9x+27\right)=27$

d) Ta có $\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\dfrac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x}$

Với $x<0,\dfrac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x}=\dfrac{-x\sqrt{3+x^2}}{2x}$. Do đó $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với $x>0,\dfrac{|x|\sqrt{3+x^2}}{2x}=\dfrac{x\sqrt{3+x^2}}{2x}$. Do đó $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$

e) Khi $x\to(-2)^+$ thì $|x+2|=x+2$. Do đó $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x|x+2|}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x}{x+1}=2$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x-2}{x^2+x+1}=-1$

Bài 6. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ b) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{9-x^2}{2x^2+7x+3}\right|$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-|x-1|}{|x-2|-2}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

HD Giải

a) Ta có $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}=\dfrac{2-x}{x}$ với mọi $x\neq -3$ và $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2-x}{x}=-\dfrac{5}{3}$

Do đó $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\left|-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{5}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{9-x^2}{2x^2+7x+3}\right|=\dfrac{6}{5}$

c) Với x > 2, ta có $|x-1|=x-1$ và $|x-2|=x-2$.

Do đó $\dfrac{3-|x-1|}{|x-2|-2}=\dfrac{3-x+1}{x-2-2}=\dfrac{4-x}{x-4}=-1$ với $x>2$ và $x\neq 4$

Vậy $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-|x-1|}{|x-2|-2}=\lim\limits_{x\to 4}(-1)=-1$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{2x^3+x^2}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{2+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$e)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1+1-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1}\right)}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1}\right)}=\dfrac{1}{6}$

$f)\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\right)=0$

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x} & nếu\ \ x<1\\ mx+m+1 & nếu\ \ x\geq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

HD✍Giải

Ta có $f(1) = 2m + 1$. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(xm+m+1)=2m+1=f(1)$ và

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-2}{x}=-1$$

Để hàm số liên tục tại x = 1 khi và chỉ khi $2m+1=-1\Leftrightarrow m=-1$

Dễ thấy với mọi m, hàm số f liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$. Vậy f liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m=-1$.

Bài 8. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & nếu\ \ x\neq 1\\ m & nếu\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

HD✍Giải

Ta có $f(1) = m$ và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$

Để hàm số f liên tục tại x = khi và chỉ khi $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)\Leftrightarrow m=3$

Vậy m = 3 thì hàm số f liên tục tại x = 1.

Bài 9. Chứng minh rằng phương trình $x^4-3x^2+5x-6=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1; 2).

HD✍Giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x^2+5x-6$. Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn [1; 2] (1)

Mặt khác, ta có $f(1)=-3<0$; $f(2)=8>0$. Do đó $f(1).f(2)<0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ta $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1; 2).

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 10. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2^n-2n+3\right)$

b) $\lim\left(\sqrt{n^4+2n^2}-n^2\right)$

c) $\lim\left(\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{2n-1}+\dfrac{2^n\cos n}{3^n}\right)$

d) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-n}+\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{2n+3}$

e) $\lim\dfrac{2^{2n+1}\left(3^{n+2}-5\right)}{3^{n-1}\left(2+4^{n+2}\right)}$

f) $\lim\dfrac{3^n.4^{n+2}+2^{n+2}}{2^{n-1}.6^{n-2}-3}$

Bài 11. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

b) $\lim\left(\sqrt[3]{1+n^3}-n\right)$

c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$

d) $\lim n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$

e) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$

f) $\lim\left(n-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1-4n}{2n^2}\right)$

Bài 12. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{(x-2)\left(x^2-x-2\right)}$ e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{4x-9}}{(x-3)\left(x^2-2x-3\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$

Bài 13. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}.\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Bài 14. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{3}x^3+5x^2-4x+1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x-3+\sqrt{4x^2+7x-9}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2x+1}{1-x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6x-5-\sqrt{36x^2-4xx-5}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+4\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x+1-\sqrt{9x^2+2x}\right)$

Bài 15. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\dfrac{2x+1}{2x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x}-1+3x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{4}x^4-2x^2+3\right)$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{36x^2-24x}-6x+2\right)$

e) $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{4x^2+x-20}{3x+9}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+5}+3x-4\right)$

Bài 16. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x^2+x-20}{2x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+5}+2x-4\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+3x-4\right)$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4x-36+\sqrt{4x^2-12x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3+x+1}+\sqrt{4x^2-3x+5}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-3x+5}+\sqrt[3]{27x^3+x+1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3-2x+4}{x+4-\sqrt{x+6}}$

k) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt[3]{x^2+4}}{x^2-4}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$

Bài 17. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-x+4 & \text{nếu } x=2\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x\neq 2\end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Bài 18. Chứng minh rằng phương trình $x^3-3x^2+5x+7=0$ luôn có nghiệm.

Bài 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x>1\\ m^2x+2mx+2 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số *m* thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} m^2x^2-mx+4 & \text{nếu } x=2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } x\neq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của tham số *m* thì hàm số $f(x)$ liên tục tại *x* = 2.

Bài 21. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-5x+4} & \text{nếu } x>1 \\ -2x+1 & \text{nếu } x\leq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại *x* = 1.

Bài 22. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^2-3x+2} & \text{nếu } x\neq 2 \\ 5x+5 & \text{nếu } x=2 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại *x* = 2.

Bài 23. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)=\begin{cases} -2x+1 & khi\ x\leq -1 \\ \dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1} & khi\ x>-1 \end{cases}$ tại $x=-1$

Bài 24. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 2x+5 & khi\ x>-2 \\ \dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3+8} & khi\ x\leq -2 \end{cases}$ tại $x=-2$

Bài 25. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 2x+8 & khi\ x\neq 1 \\ \dfrac{x^4+3x^2-4}{x^3-2x+1} & khi\ x=1 \end{cases}$ tại $x=1$

Bài 26. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x+\sqrt{x+2}} & khi\ x>-1 \\ \dfrac{1}{3}x^3+x^2+2x-2 & khi\ x\leq -1 \end{cases}$ tại $x=-1$

Bài 27. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{5.2^n-3.7^n}{4^n+2.5^n}$ b) $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2+1}+n}{2n+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^6-2x}}{3x^2+2}$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+3}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^3-11x^2+7x-3}{5x^3-19x^2+14x-6}$

g) $\lim\limits_{x\to4^+}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{1}{x-4}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$

Bài 28. Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\dfrac{(n+2)(2-3n)^2}{n^3+8}$ b) $\lim\dfrac{2^{n+3}-2^{2n+1}}{4^{n-2}+3^n}$ c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-7x^2+11x-10}{x^3-2x^2-3x+6}$

d) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}-5}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-5x-3}{\sqrt{5x+6}+x}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+2x-5}{\sqrt[3]{8x^3-x}}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+12x}+3x-15\right)$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-5x}+x-3}{2x+3-\sqrt{4x^2-7}}$

Bài 29. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^3-3x^2+5x-2}{1-8x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\left(6x^2+4\right)^3\left(3x^2-5\right)^4}{\left(9x^4-2\right)^2\left(8x^3+2\right)^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2+\sqrt{x^2+3x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x-2}}{x^2-1}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt[3]{x+8}}{2x^2+x}$ g) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^3+2x^2-4x+1}{27x^3-1}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\left(3x^3-4\right)^3\left(5x^2+1\right)^4}{\left(4x^4-2\right)^2\left(7x^2+2\right)^3}\right)$ i) $\lim\dfrac{2^n\left(3^{n-1}-5.2^n\right)}{3^{n-1}\left(2^n+4\right)}$ j) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt[3]{3x+18}}{x-3}$

Bài 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} m & khi\ x=2 \\ \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4} & khi\ x\neq 2\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số *m* thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Bài 31. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} m^2x^2-mx+4 & khi\ x=2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & khi\ x\neq 2\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số *m* thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Bài 32. Bài 2(2,5điểm). Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & khi\quad x\neq 1 \\ m^2x+2mx+2 & khi\quad x=1\end{cases}$. Tìm *m* để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Bài 33. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{6x-3}}{4-x^2} & khi\quad x\neq 2 \\ m^2x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{4} & khi\quad x=2\end{cases}$. Tìm *m* để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Bài 34. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x^3-1} & khi\ \ x\neq 1 \\ m^2x^2-4x & khi\ \ x=1\end{cases}$. Tìm *m* để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Bài 35. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x} & khi\ \ x>0 \\ (1+x)m^2+(1-2x)m-\dfrac{5}{4} & khi\quad x\leq 0\end{cases}$. Tìm *m* để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Bài 36. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+4}-5}{x} & khi\ \ x>0 \\ (1-x)m^2+(2x-1)m-\dfrac{19}{12} & khi\quad x\leq 0\end{cases}$. Tìm *m* để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Bài 37. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-14}{x^3-x^2-x-2} & khi\quad x\neq 2\\ \dfrac{3m-5}{2x+3} & khi\quad x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Bài 38.

a) Chứng minh rằng phương trình $x^5+x-1=0$ có ít nhất một nghiệm thực.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^3+3x^2-4x-7=0$ có ít nhất một nghiệm.

c) Chứng minh rằng phương trình $2x^4-x^3+3x^2-3x-9=0$ có ít nhất hai nghiệm.

d) Chứng minh rằng phương trình $16x^4-16x^3+19x^2-16x+3=0$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng (0; 1).

e) Chứng minh rằng các phương trình: $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

f) Chứng minh rằng các phương trình: $\sin x = x - 1$ có ít nhất một nghiệm có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

g) Chứng minh rằng phương trình $x^5-3x^4+5x-2=0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

h) Chứng minh rằng phương trình $x^5-5x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1: $\lim\left(2.3^n - 5.4^n\right)$ bằng.

A. 5. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 2: $\lim\frac{2^{n+1} - 3.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** -3. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $+\infty$.

Câu 3: $\lim\left(3.2^n - 5^{n+1} + 10\right)$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** -5.

Câu 4: $\lim\frac{13.3^n - 5n}{3.2^n + 5.4^n}$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 5: $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n-1} - \sqrt{n}\right)$ bằng.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** 1.

Câu 6: $\lim\frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 7: $\lim\left(\sqrt{n^2 - n} - n\right)$ bằng.

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 8: $\lim\sqrt{3n^4 - 10n + 12}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 9: $\lim\sqrt{2.3^n - n + 2}$ bằng.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 10: $\lim\frac{2^{n+1} - 3^n + 11}{3^{n+2} + 2^{n+3} - 4}$ bằng.

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{17}$. **D.** $-\frac{1}{9}$.

Câu 11: $\lim\left(\sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n+1}\right)$ bằng.

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 12: $\lim\sqrt{\frac{3^n + 2^{n+1}}{5 + 3^{n+1}}}$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 13: $\lim n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+2}\right)$ bằng.

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 14: Tìm $M=\lim\left(3+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$

A. $M=3$. **B.** $M=1$. **C.** $M=4$. **D.** $M=0$.

Câu 15: $\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$ bằng.

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 16: Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q=\frac{2}{3}$

A. $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. **B.** $u_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. **C.** $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. **D.** $u_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

Câu 17: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+n}{2n+1}$ bằng.

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 18: Tính tổng $S=-1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+...+\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}+...$

A. $S=\frac{10}{11}$. **B.** $S=-\frac{10}{11}$. **C.** $S=\frac{1}{11}$. **D.** $S=-\frac{11}{10}$.

Câu 19: $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Câu 20: $\lim\frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$ bằng.

A. -1. **B.** 0. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 1.

Câu 21: $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)$ bằng.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Câu 22: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$ bằng.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 23: $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 24: Tìm $H=\lim\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

A. $H=3$. **B.** $H=-\frac{1}{2}$. **C.** $H=1$. **D.** $H=\frac{1}{3}$.

Câu 25: $\lim\left(\sqrt{n^2+3n}-n+2\right)$ bằng.

A. $\frac{7}{4}$. **B.** 2. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 26: $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)$ bằng.

A. 0. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 27: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng.

A. -2. **B.** -1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 28: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $\left|u_n-1\right|<\frac{1}{n^3}$ với mọi n. Tìm $\lim u_n$?

A. $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n=1$. **C.** $\lim u_n=-1$. **D.** $\lim u_n=0$.

Câu 29: Tìm $I=\lim\frac{3^n+1-\sin\frac{\pi}{n}}{3^n}$.

A. $I=0$. **B.** $I=\frac{1}{3}$. **C.** $I=1$. **D.** $I=\frac{1}{2}$.

Câu 30: Tìm $K=\lim\frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}$.

A. $K=\frac{3}{4}$. **B.** $K=\frac{5}{2}$. **C.** $K=5$. **D.** $K=1$.

Câu 31: $\lim\frac{(n+1)(3-2n)^2}{n^3+1}$ bằng.

A. -2. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 32: $\lim\sqrt{3.4^n-n+2}$

A. 0. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 33: Tính tổng $S=2-\sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-...$

A. $S=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. **B.** $S=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. **C.** $S=\sqrt{2}+1$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Câu 34: $\lim\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 35: Tìm $J=\lim\left(\frac{n+1}{n}+\frac{\cos n}{3^n}\right)$.

A. $J=2$. **B.** $J=1$. **C.** $J=0$. **D.** $J=\frac{1}{2}$.

Câu 36: Biết tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là $\frac{5}{3}$, tổng ba số hạng đầu tiên của nó là $\frac{39}{25}$. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số đó.

A. $u_1=1,q=\frac{5}{2}$. **B.** $u_1=1,q=\frac{2}{5}$. **C.** $u_1=2,q=\frac{2}{5}$. **D.** $u_1=1,q=2$.

Câu 37: $\lim\frac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** n. **D.** 0.

Câu 38: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân lùi vô hạn, biết rằng tổng của cấp số nhân đó là 12, hiệu của số hạng đầu và số hạng thứ hai là $\frac{3}{4}$ và số hạng đầu là một số dương.

A. $u_1=3;q=\frac{3}{4}$. **B.** $u_1=3;q=\frac{1}{4}$. **C.** $u_1=1;q=\frac{3}{4}$. **D.** $u_1=3;q=3$.

Câu 39: Tính tổng $S=9+3+1+...+\frac{1}{3^{n-3}}+...$

A. $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=\frac{35}{3}$. **C.** $S=\frac{7}{2}$. **D.** $S=\frac{27}{2}$.

Câu 40: Giải phương trình $\frac{1}{x}+x+x^2+...+x^n+...=\frac{7}{2}$, trong đó $|x|<1$.

A. $x\in\{1;2\}$. **B.** $x\in\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **C.** $x\in\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **D.** $x\in\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right\}$.

Câu 41: Tìm tổng cấp số nhân $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...,\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},...$

A. $S=\frac{3}{2}$. **B.** $S=\frac{2}{3}$. **C.** $S=\frac{3}{8}$. **D.** $S=\frac{3}{4}$.

Câu 42: Tính tổng $S=1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+...+(0,9)^{n-1}+...$

A. $S=\frac{9}{10}$. **B.** $S=11$. **C.** $S=10$. **D.** $S=9$.

Câu 43: $\lim\frac{1}{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2n+1}}$ bằng.

A. 0. **B.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Câu 44: $\lim\left(\frac{1}{2}n^2-3\sin 2n+5\right)$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 5. **D.** $\frac{11}{5}$.

Câu 45: Tìm tổng cấp số nhân $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},...,\frac{1}{2^n},...$

A. $S=\frac{1}{2^{n+1}}$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2^n$.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^2+4x+5}{x^4-x+3}$ bằng.

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2: $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}\right)$ bằng.

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** –2. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 3: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^3+15}{(x+2)^2}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{16}$

Câu 4: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}=a$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}=b$. Tính $P=a.b+1$

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\frac{1}{4}$. **D.** $P=-2$.

Câu 5: Biết $\lim\limits_{x\to0}x\left(1-\frac{1}{x}\right)=\cos\alpha$. Giá trị của α.

A. $\alpha=\frac{\pi}{2}$. **B.** $\alpha=\pi$. **C.** $\alpha=2\pi$. **D.** $\alpha=\frac{3\pi}{2}$.

Câu 6: $\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ bằng.

A. $\frac{1}{32}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 7: $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$ bằng.

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 8: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ bằng.

A. 5. **B.** $-\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 9: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x^2-x+1\right)$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 10: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x^2+2x+1}$ bằng.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1; & x\ge 0\\ 2x; & x<0\end{cases}$.và dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{n}$. Tính $\lim f(u_n)$

A. $\lim f(u_n)=1$. **B.** $\lim f(u_n)=-1$. **C.** $\lim f(u_n)=0$. **D.** $\lim f(u_n)=2$.

Câu 12: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}\right)=3$. Giá trị của a.

A. $a=\frac{5}{2}$. **B.** $a=\frac{1}{2}$. **C.** $a=-\frac{1}{2}$. **D.** $a=3$.

Câu 13: $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ bằng.

A. 6. **B.** 9. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}-1}{\sqrt{x-1}}$ bằng.

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 15: $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 16: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ bằng.

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $+\infty$.

Câu 17: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ bằng.

A. $\frac{5}{6}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** 6.

Câu 18: $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^3-8}}{x^2-2x}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x+m\right)=\frac{3}{4}$. Giá trị của m.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=\frac{1}{4}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=\frac{3}{4}$.

Câu 20: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^6+4x^2+x-2}{\left(x^3+2\right)^2}=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-40}{2x^5+7x^4+21}=b$. Tính $S=a-b$.

A. $S=0$ **B.** $S=1$ **C.** $S=\frac{1}{2}$ **D.** $S=\frac{10}{3}$

Câu 21: $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$ bằng.

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** -2.

Câu 22: Biết $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+1}-x\sqrt{5}\right)=a$. Tính $\cos a$.

A. $\cos a=0$ **B.** $\cos a=1$ **C.** $\cos a=\dfrac{1}{2}$ **D.** $\cos a=k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Câu 23: $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{\sqrt{x+3}-2}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 24: $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{6}$ **C.** -6. **D.** -1.

Câu 25: $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}$ bằng.

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 0. **C.** 9. **D.** -1.

Câu 26: $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$ bằng.

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 27: Biết $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\dfrac{a}{b}$. Tính $P=a.b$.

A. $P=3$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=1$. **D.** $P=2$.

Câu 28: $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 29: $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{2x^3+x^2}}$ bằng.

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 30: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$ bằng.

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}; & x>1\\ mx+2; & x\le 1\end{cases}$.

Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 1$? Tìm giới hạn này.

A. $m=1; \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2.$ **B.** $m=2; \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2.$ **C.** $m=2; \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1.$ **D.** $m=1; \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1.$

Câu 32: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x-4}+3x+1}{\sqrt{x^2+4x-3}+2x-5}$ bằng.

A. 1. **B.** $-\dfrac{4}{3}.$ **C.** $\dfrac{4}{3}.$ **D.** $\dfrac{3}{4}.$

Câu 33: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=a$. Tính $P=C_{10}^{a}+a$

A. $P=47$ **B.** $P=100$ **C.** $P=2$ **D.** $P=45$

Câu 34: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{2}.$ **B.** 2. **C.** $\dfrac{3}{4}.$ **D.** $\dfrac{4}{3}.$

Câu 35: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$ bằng.

A. $-\dfrac{4}{3}.$ **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\dfrac{3}{2}.$

Câu 36: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}=c$. Tính $H=\dfrac{c^2}{2}+1$

A. $H=-1.$ **B.** $H=3.$ **C.** $H=4.$ **D.** $H=-2.$

Câu 37: $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(x+x^2+...+x^n-\dfrac{n}{1-x}\right)$ bằng.

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Câu 38: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2+x-2}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$ bằng.

A. $\dfrac{1}{9}.$ **B.** $-\dfrac{9}{2}.$ **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{9}.$

Câu 39: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$ bằng.

A. $-\infty.$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$ **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $\dfrac{1}{3}.$

Câu 40: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ bằng.

A. $-2.$ **B.** 2. **C.** $-\infty.$ **D.** 0.

Câu 41: Biết $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+x+10}{x^3+6}=a$ và $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+11x+30}{25-x^2}=b$. Tính $S=a+b.$

A. $S=\dfrac{1}{10}$ **B.** $S=\dfrac{1}{5}$ **C.** $S=\dfrac{21}{10}$ **D.** $S=2$

Câu 42: $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ bằng.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 43: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5}$ bằng.

A. 1. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 44: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ bằng.

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3; & x\le 2 \\ 4x-3; & x>2 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

A. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$.

C. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ không tồn tại. **D.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$.

Câu 46: $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ bằng.

A. 0. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 5x+2; & x\ge 1 \\ x^2-3; & x<1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=7$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ không tồn tại.

Câu 48: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ bằng.

A. -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 1: Tìm số thực *a* sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases} a^2x^2 & \text{nếu } x\le 2 \\ (1-a)x & \text{nếu } x>2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=-1, a=1$. **B.** $a=1, a=\frac{1}{2}$. **C.** $a=-1, a=2$. **D.** $a=-1, a=\frac{1}{2}$.

Câu 2: Tìm các giá trị của tham số *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & \text{với } x<2 \\ mx+m+1 & \text{với } x\ge 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=4$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=6$. **D.** $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 3: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Hàm số $y=\tan x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=x+\sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

D. Phương trình $x^5-3x^4+5x-2=0$ có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng $(-2;5)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{với } x>1\\ mx+2 & \text{với } x\le 1\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số *m* thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-3$.

Câu 5: Tìm các giá trị của tham số *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6} & \text{khi } x>2 \text{ và } x\ne 3\\ m^2x^2-3mx-5 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

A. $m=\dfrac{3\pm\sqrt{21}}{4}$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=3\pm\sqrt{21}$. **D.** $m=\dfrac{4\pm\sqrt{21}}{3}$.

Câu 6: Tìm các giá trị của *a* và *b* để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax-b & \text{với } x\le 1\\ 3x & \text{với } 1<x<2\\ bx^2-a & \text{với } x\ge 2\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ và gián đoạn tại $x=2$.

A. $\begin{cases}b=a+3\\ a\ne 3\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}b=a+3\\ b\ne 3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=b-3\\ b\ne 3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=b+3\\ b\ne 3\end{cases}$.

Câu 7: Tìm *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{với } x\ne 1\\ m^2x & \text{với } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\ne\pm\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=\pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 8: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Phương trình (1) chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

D. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

Câu 9: Tìm giá trị của *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{với } x\ne 2\\ m & \text{với } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 10: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào sai ?

A. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì hàm số $y=f(x)-g(x)$ liên tục tại x_0.

B. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0, còn hàm số $y=g(x)$ không liên tục tại x_0 thì $y=f(x)+g(x)$ là hàm số không liên tục tại x_0.

C. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm x_0, còn hàm số $y=g(x)$ không liên tục tại x_0 thì $y=f(x)+g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0.

D. Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

C. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Câu 12: Tìm tham số thực *m* để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2-5x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ x^2m^2+m+x^3 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m\in\varnothing$ **C.** $m\neq\pm\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

Câu 1: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{ax^2+bx+1}{cx^2+dx+1}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $P=abcd$.

A. $P=6$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-8$. **D.** $P=4$.

Câu 2: $\lim\dfrac{1}{n!}$ bằng.

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{1000}$. **D.** $\dfrac{1}{10^9}$.

Câu 3: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: $\lim n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 5: $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{5}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $-\dfrac{3}{5}$.

Câu 6: $\lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{(-1)^n\left(\sqrt{3}\right)^n}{3.2^{n+1}}\right)$ bằng.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 7: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ bằng.

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{56}$. **C.** $+\infty$. **D.** -56.

Câu 8: $\lim\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^n+\dfrac{3^n}{4^n}\right)$ bằng.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Câu 9: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{1}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Câu 10: $\lim\left(10-\dfrac{2\sin n^2}{\sqrt{n}}\right)$ bằng.

A. 0. **B.** 10. **C.** $+\infty$. **D.** 9.

Câu 11: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là -1?

A. $\lim\dfrac{n^2+n}{-2n-n^2}$. **B.** $\lim\dfrac{n^2-n^3}{2n^3+1}$. **C.** $\lim\dfrac{2n+3}{2-3n}$. **D.** $\lim\dfrac{n^3}{n^2+3}$.

Câu 12: $\lim\left((0.99)^n\cos n\right)$ bằng.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{9}{10}$. **C.** $\dfrac{11}{10}$. **D.** 0.

Câu 13: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 14: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$ bằng.

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{56}$.

Câu 15: $\lim\dfrac{2n\sqrt{n}}{n^2+2n-1}$ bằng.

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 3.

Câu 16: Biết $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2+11x+18}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)\left(ax^2+bx+c\right)}{(x+2)(x+d)}$, với $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=-2$. **B.** $S=9$. **C.** $S=4$. **D.** $S=12$.

Câu 17: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ bằng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 8. **D.** -3.

Câu 18: $\lim \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ bằng.

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 19: Cho phương trình $x^3+3x^2-4x-7=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

B. Phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $(-4;0)$.

C. Hàm số $f(x)=x^3+3x^2-4x-7$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Phương trình (1) ít nhất nghiệm trong khoảng $(1;3)$.

Câu 20: $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n^2-n}}{2n-1}+\dfrac{2^n\cos n}{3^n}\right)$ bằng.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-|x-1|}{|x-2|-2}$ bằng.

A. 4. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 22: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+2}\left(5-3^{2n-3}\right)}{\left(2^{2n+1}-1\right)\left(2-9^{n-2}\right)}$ bằng.

A. 4. **B.** 24. **C.** 16. **D.** 36.

Câu 23: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0 ?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Câu 24: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 25: Cho phương trình $-4x^3+4x-1=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

B. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$

C. Hàm số $f(x)=4x^3+4x-1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 26: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ bằng.

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{m(x^2-1)}{m-1} & \text{khi } x=3\\ \dfrac{x^2-9}{3-\sqrt{2x+3}} & \text{khi } x\neq 3\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=3$.

A. $m=\dfrac{9}{13}$. **B.** $m=-18$. **C.** $m=-\dfrac{9}{13}$. **D.** $m=18$.

Câu 28: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là 0?

A. $\lim\dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. **B.** $\lim\dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

C. $\lim\dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. **D.** $\lim\dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

Câu 29: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}.\sqrt[3]{3x+1}-1}{x}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -4.

Câu 30: $\lim\dfrac{2n-3n^3+1}{n^3+n^2}$ bằng.

A. 0. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 31: Biết $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=a$. Tính $H=P_a+A_a^a+C_a^a$

A. 105. **B.** 9. **C.** 55. **D.** 3.

Câu 32: Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)^3-8}{x^2+x} & \text{nếu } x\neq 0, x\neq -1\\ x^2-2x+12 & \text{nếu } x=0\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là sai ?

A. $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=0$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^3-8}{x^2+x}=12$ **D.** Hàm số liên tục tại $x=0$

Câu 33: $\lim\dfrac{n-2\sqrt{n}}{2n}$ bằng.

A. -1. **B.** 2. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 34: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt[3]{x^2+4}}{x^2-4}$ bằng.

A. -7. **B.** $-\dfrac{7}{48}$. **C.** $-\dfrac{1}{48}$. **D.** $\dfrac{7}{48}$.

Câu 35: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$ bằng.

A. $\dfrac{4}{3}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 36: $\lim \dfrac{3n^3-5n+1}{n^2+4}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 37: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ bằng.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 38: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$ bằng.

A. $\dfrac{15}{11}$. **B.** $\dfrac{15}{10}$. **C.** 15. **D.** $\dfrac{11}{15}$.

Câu 39: $\lim \left(n-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1-4n}{2n^2}\right)$ bằng.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 40: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$ bằng.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** -3. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 41: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{3x^2+x+1}-x\sqrt{3}\right)$ bằng.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** 0.

Câu 42: Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,313131…dưới dạng một phân số.

A. $\dfrac{32}{99}$. **B.** $\dfrac{13}{99}$. **C.** $\dfrac{100}{99}$. **D.** $\dfrac{31}{99}$.

Câu 43: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111...$ được biểu diễn bởi một phân số.

A. $\dfrac{6}{11}$. **B.** $\dfrac{47}{90}$. **C.** $\dfrac{46}{90}$. **D.** $\dfrac{43}{90}$.

Câu 44: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim \dfrac{n^2-n+1}{2n-1}$. **B.** $\lim \dfrac{n^2-3n+2}{n^2+n}$. **C.** $\lim \dfrac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **D.** $\lim \dfrac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{a-x^2}{x}$. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ bằng.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** -1.

Câu 46: Biết $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(x+3)^3-27}{x}+m\right)=27$. Giá trị của m là.

A. $m=0$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=27$. **D.** $m=1$.

Câu 47: $\lim \left(\sqrt[3]{1+n^3}-n\right)$ bằng.

A. 3. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 48: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 0.

Câu 49: $\lim\left(5^n-\cos\sqrt{n}\pi\right)$ bằng.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 50: $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ bằng.

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 51: Biết $\left|u_n-2\right|\le\dfrac{1}{3^n}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=2$. **B.** $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$. **C.** $\lim u_n=0$. **D.** $\lim u_n=+\infty$.

Câu 52: $\lim\dfrac{n\sin n^2-3n^2}{n^2}$ bằng.

A. 2. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 3.

Câu 53: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào không tồn tại ?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ **B.** $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x}{(x+1)^2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

Câu 54: Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào là -1 ?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-1}{3x+x^2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{x^2-5x}$. **C.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2+3}{5x^2-x^3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x\ne 3\\ m & \text{nếu } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi m bằng.

A. 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Câu 56: $\lim\left(\sqrt{n^4+2n^2}-n^2\right)$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x} & \text{với } x<1, x\ne 0\\ 0 & \text{với } x=0\\ \sqrt{x} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc đoạn $[0;1]$.
C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=0$.
D. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x=1$.

Câu 58: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5\left|x-7\right|+\sqrt[3]{9x^3-3x^2+1}}{2017-4\left|x\right|}$ bằng.

A. $\frac{\sqrt[3]{9}-5}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt[3]{9}+5}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 59: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x^2+x^4}}{2x}$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** Không tồn tại **D.** 0.

Câu 60: Tìm tham số m để hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}\frac{3-\sqrt{5x-1}}{2x^2-5x+2} & \text{khi } x>2\\ (m-2)x^3-mx+10 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$

A. $m=-\frac{103}{108}$. **B.** $m=\frac{103}{108}$. **C.** $m=\frac{5}{18}$. **D.** $m=-\frac{5}{18}$.

Câu 61: $\lim\frac{3^n-4^n}{2.4^n+2^n}$ bằng.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** –2. **C.** –1. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 62: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4^{n+2}\left(5-3^{2n-3}\right)}{\left(2^{2n+1}-1\right)\left(2-9^{n-2}\right)}$ bằng.

A. 24. **B.** –24. **C.** 42. **D.** –42.

Câu 63: $\lim\left(2^n+\frac{1}{n}\right)$ bằng.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 64: $\lim\frac{2-n(-1)^n}{1+2n^2}$ bằng.

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** –2.

Câu 65: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}+2(-5)^n}{6^{n-2}-3}$ bằng.

A. 108. **B.** 102. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 66: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3+\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt[3]{8x^3-4x^2}-x+5}+2m\right)=10$. Giá trị của m là.

A. $m=5$. **B.** $m=0$. **C.** $m=10$. **D.** $m=1$.

Câu 67: Cho phương trình $\frac{1}{x}=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Phương trình (1) không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) vô nghiệm

D. Hàm số $f(x)=\frac{1}{x}$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$

Câu 68: $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x-3}{3-\sqrt{6x-x^2}}$ bằng.

A. 2. **B.** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 69: $\lim\left(\frac{\sqrt{4n^2-n}+\sqrt[3]{8n^3+n^2}}{2n+3}\right)$ bằng.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 70: $\lim\left(2^n-2n+3\right)$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 71: Tổng của cấp số nhân vô hạn $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...\frac{(-1)^n}{2^n},...$

A. $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-\frac{1}{4}$. **D.** $S=-\frac{1}{3}$.

Câu 72: $\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ bằng.

A. 0. **B.** -2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 73: Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,131131131...$ dưới dạng một phân số.

A. $\frac{2129}{999}$. **B.** $\frac{212}{999}$. **C.** $\frac{219}{999}$. **D.** $\frac{129}{999}$.

Câu 74: $\lim\frac{\left(2-3n\right)^3\left(n+1\right)^2}{1-4n^5}$ bằng.

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{27}{4}$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 75: $\lim\frac{\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{4n^2-2}}{n+3}$ bằng.

A. -2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{3}$.

ĐÁP ÁN

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45

A					
B					
C					
D					

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48
A								
B								
C								
D								

HÀM SỐ LIÊN TỤC

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A												
B												
C												
D												

ÔN TẬP CHƯƠNG IV. GIỚI HẠN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

A																				
B																				
C																				
D																				

	61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**
A															
B															
C															
D															